## Άσκηση
Να βρεθεί κατάλληλος τρόπος υπολογισμού της παράστασης $1-\cos x$, μικρό $|x|$. Ζητάμε να μη χάνεται η ακρίβεια μέσω των πράξεων.

<u>Α' τρόπος</u>: Από το Θεώρημα Taylor

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

Για πληρότητα αναφέρουμε

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

Συνεπώς για μικρό $|x|$ ($0 < x \ll 1$)

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{ή}$$
$$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$$

<u>Β' τρόπος</u>: Θυμάμαι $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

*Αφαιρώ το 1 από τον εαυτό του, η παράσταση είναι προβληματική*

$$\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$$
$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$$

Η παράσταση $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

Είναι συμβατοί οι δυο τρόποι?

<u>Α' τρόπος</u> $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$

B' τρόπος $\quad 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} =$

$2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 \cong 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$

Άσκηση Να επαναλάβετε τον υπολογισμό για τον $-e^{x-y}$, για μεγάλα θετικά $x, y$

$-\sin(a+x)-\sin a$, για μικρά $|x|$.

Ασκηση

Θεωρούμε την ακολουθία $y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx$, $a>0$, $n=0,1,2,3$

α) Να αποδείξετε ότι $\forall a>0$ η ακολουθία $\{y_n\}$ είναι γνησίως φθίνουσα και $\lim y_n = 0$.

ΝΔο $y_{n+1} < y_n$

$$y_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+a} dx$$

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx$$

Όμως για $0<x<1$

$x^{n+1} < x^n$

Επίσης $\frac{x^n}{x+a} > 0$, $a>0$

$0<x<1$

Άρα $y_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+a} dx < \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx = y_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_{n+1} < y_n$

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x} dx =$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{a} dx =$$

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx < \int_0^1 \frac{x^n}{a}\,dx = \frac{1}{a}\frac{1}{n+1}$$

$$0 < \frac{x^n}{x+a} < \frac{x^n}{a}\ , \quad x>0$$

Συνεπώς $y_n < \frac{1}{a}\frac{1}{n+1}$

$$y_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+a}\,dx = \ln(x+a)\Big|_0^1 = \ln(1+a) - \ln a =$$

$$= \ln\frac{1+a}{a}$$

Τελικά $y_0 < y_n < \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1} \Longrightarrow$

$$0 < y_n < \frac{1}{a}\,\frac{1}{n+1} \Longrightarrow \lim y_n = 0$$

(b) Να αποδείξετε ότι για $n \geq 1$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} a^k \frac{(1+a)^{n-k} - a^{n-k}}{n-k} +$$

$+ (-a)^n \ln\frac{1+a}{a}$ και να εξετάσετε αν ο τρόπος υπολογισμού είναι ευσταθής

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx$$

Α' τρόπος: Διαιρώ τα πολυώνυμα $x^n / x+a$.

Β' τρόπος: $\int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx = \int_a^{1+a} \frac{(y-a)^n}{y}\,dy$

$y = x+a$

**Bonus**: Η γεωμετρική σειρά $\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\frac{x}{a}}$

για $\underbrace{\left|\frac{x}{a}\right| < 1}_{|r|<1}$ $\qquad \frac{1}{1-r} = \sum_{n=0} r^n$

$$\frac{x^n}{x+a} = \frac{1}{a} x^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^k (-1)^k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{a}\right)^k x^{k+n}$$

(c) Να βρεθεί αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό της $y_n$ και να δείξετε ότι αυτός ο αλγόριθμος είναι ασταθής.

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx$$

$$y_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+a}\,dx$$

$$y_n + a y_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx + \int_0^1 \frac{a x^{n-1}}{x+a}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n + a x^{n-1}}{x+a}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+a)}{x+a}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$$

Δηλαδή $\quad y_0 = \ln\left(\frac{1+a}{a}\right)$

$$y_n = \frac{1}{n} - a y_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$y_0 \longrightarrow y_0^*$ αρχική τιμή

$$y_n^* = \frac{1}{n} - a y_{n-1}^*, \quad n \geq 1$$

Τότε $\quad \underbrace{y_n - y_n^*}_{A_n} = \left(\frac{1}{n} - a y_{n-1}\right) - \left(\frac{1}{n} - a y_{n-1}^*\right)$

$$= -a\left(y_{n-1} - y_{n-1}^*\right) \quad [A_n = -a A_{n-1}]$$

$A_0 = y_1 - y_0^*$

$A_1 = -a A_0$

$A_2 = -a A_1 = (-a)(-a) A_0$

$A_3 = -a A_2 = (-a)(-a)(-a) A_0$

Επαγωγικά

$A_n = (a)^n A_0 \Rightarrow$

$|y_n - y_n^*| = a^n |y_0 - y_0^*|$ , n μεγάλο